ゲームの解と極大鎖の利用 (非加法性の数理と情報 : 非加法性と凸解析)

本田, あおい; 岡崎, 悦明

数理解析研究所講究録
第 1630 巻 2009 年 70-76

ゲームの解と極大鎖の利用

本田あおい 岡崎悦明
(九州工業大学・情報工学部)

1 はじめに

$X=\{1,2,\ldots,n\}$ を有限集合とする. 集合関数 $v: 2^X \to \mathbb{R}$ が $v(\emptyset)=0$ を満たすとき, v は協力ゲーム, あるいは単にゲームと呼ばれる. 協力ゲームの全体から n 次元実数ベクトルへの関数を協力ゲームの解といい, 代表的なものではシャプレイ値 [6] とバンザフ値 [2] がよく知られている. 協力ゲーム理論は社会的・経済的行動における人間の集団的行動形態の分析に不可欠な役割を果たす理論であり, X はプレイヤーの集合, v はプレイヤー間の任意の提携について確保できる利益を表す. また, ゲームの解は各プレーヤーの貢献度の評価, あるいは分配されるべき利益の配分を表している.

我々はこれまでに定義域を $\mathfrak{S} \subsetneq 2^X$ とした一般化協力ゲームの解の提案と公理系による特徴付けを行った. 我々の提案した解は Shapley 値と Fagle-Kern の解 [3] を特別な場合として含むものでこれらの拡張となっている. また, 我々の公理系は Shapley 値の必要十分条件となる公理系の一般化である. 本論文では, $\mathfrak{S} \subsetneq 2^X$ 上のゲームとその公理系の意味付けと妥当性を考察する. また, $\mathfrak{S} \subsetneq 2^X$ 上の協力ゲームを情報の欠けた協力ゲームと捉えた場合のより適切な解を提案する.

2 準備

$X=\{1,2,\ldots,n\}$ とし X の部分集合全体を 2^X であらわす. $\mathfrak{S} \subseteq 2^X$ が $\emptyset$ と X を要素に持つとき $(X,\mathfrak{S})$ を集合系とよぶ. X が明らかな場合は単に $\mathfrak{S}$ と書く. 協力ゲームの定義域は通常 2^X である. ここでは協力ゲームをより一般化して 2^X 全体でなくてもよいとし, 定義域を $\mathfrak{S} \subsetneq 2^X$ とする.

定義 1 (一般化協力ゲーム). $(X,\mathfrak{S})$ を集合系とする. 関数 $v:\mathfrak{S}\to\mathbb{R}$ が $v(\emptyset)=0$ を満たすとき, v を協力ゲームとよぶ.

協力ゲーム理論では X はプレイヤーの集合を表す. $A\in\mathfrak{S}$ はプレイヤーの集まり, つまりプレイヤーの提携である. $v(A)$ はプレイヤーの提携 A により得られる利得を意味する.

次は Shapley により与えられた協力ゲームの解である. これは 2^X 上の協力ゲームの解を与える.

定義 2 (シャプレイ値). v を $(X,2^X)$ 上のゲームとする. v のシャプレイ値 $\Phi_{\mathrm{S}}(v)=(\phi_{\mathrm{S}}^1(v),\ldots,\phi_{\mathrm{S}}^n(v))\in\mathbb{R}^n$ は次のように定義される.

$$\text{(S)}\quad \phi_{\mathrm{S}}^i(v):=\sum_{E\subseteq X\setminus\{i\}}\gamma_{|E|}^n(v(E\cup\{i\})-v(E)),\ i=1,\ldots,n,$$

ただし

$$\gamma_k^n := \frac{(n-k-1)!\ k!}{n!}.$$

次に, 一般化協力ゲームの解を定義するため, 極大鎖の概念を導入する. $A, B \in \mathfrak{S}$ について $A \subsetneq B$ かつ $A \subseteq C \subsetneq B, C \in \mathfrak{S}$ が同時に成り立つならば $C = A$ であるとき A は B に被覆されている, あるいは B は A を被覆しているといい, $A \prec B$ または $B \succ A$ と書く. $A \subsetneq B$ の包含関係の間に入る要素が存在しないという意味である.

定義 3 (極大鎖). $(X, \mathfrak{S})$ を集合系とする. $\mathscr{C} = (C_0, C_1, \dots, C_m), C_i \in \mathfrak{S}, i = 0, \dots, m$ が $\emptyset = C_0 \prec C_1 \prec \cdots \prec C_m = X$ を満たすとき $\mathscr{C}$ を $\mathfrak{S}$ の極大鎖とよぶ.

極大鎖 $(C_0, C_1, \dots, C_m)$ の長さは m である. $\mathfrak{S}$ の長さ $m, 1 \le m \le n$ の極大鎖全体を $\mathscr{M}_m(\mathfrak{S})$ と書くことにする. 例えば, 2^X には $n!$ 個の極大鎖が存在し全て長さ n, すなわち $|\mathscr{M}_n(2^X)| = n!$ である.

定義 4 (全順序集合系). $(X, \mathfrak{S})$ を集合系とする. 任意の $E, F \in \mathfrak{S}$ に対して, $E \subseteq F$ か $E \supsetneq F$ が成り立つとき, $(X, \mathfrak{S})$ を全順序集合系とよぶ.

定義 5 (正規集合系). $(X, \mathfrak{S})$ を集合系とする. 任意の $E \in \mathfrak{S}$ に対して, ある $\mathscr{C} \in \mathscr{M}_n(\mathfrak{S})$ が存在して $E \in \mathscr{C}$ が成り立つとき, $(X, \mathfrak{S})$ を正規集合系とよぶ.

次は我々の提案する正規集合系上の一般化協力ゲームの解である. シャプレイ値, 及びFagle-Kernの解の一般化となっている.

定義 6 (一般化協力ゲームの解 [4] **).** v を正規集合系 $(X, \mathfrak{S})$ 上のゲームとする. このとき v のゲームの解 $\Phi(v) = (\phi^1(v), \dots, \phi^n(v)) \in \mathbb{R}^n$ を次のように定義する.

$$\textbf{(FK)} \quad \phi^i_{\mathrm{FK}}(v) := \frac{1}{|\mathscr{M}_n(\mathfrak{S})|} \sum_{\mathscr{C} \in \mathscr{M}_n(\mathfrak{S})} (v(E_{\mathscr{C}} \cup \{i\}) - v(E_{\mathscr{C}})), i = 1, \dots, n,$$

ただし $E_{\mathscr{C}}$ は $i \notin E$ かつ $E \cup \{i\} \in \mathscr{C}$ を満たす $\mathscr{C} \in \mathscr{M}_n(\mathfrak{S})$ の要素.

我々は, 定義 6 の解, (FK) の必要十分条件となる公理系を示した [5]. ここでは全く別の公理系による特徴付けを示す.

公理 1 (全体合理性). 任意のゲーム v に対して

$$\sum_{i=1}^{n} \phi^i(v) = v(X).$$

公理 2 (ナルプレイヤーのゼロ評価). $i \in X$ が次の条件を満たすとする: 任意の $E \in X \setminus \{i\}$ に対して $v(E \cup \{i\}) = v(E)$ が成り立つ. このとき, $\phi^i(v) = 0$.

公理 3 (対称性). X 上の置換 π について, 任意の $E \in \mathfrak{S}$ に対して $\pi(E) \in \mathfrak{S}$ が成り立つとする. このとき, $\phi^i(v) = \phi^{\pi(i)}(\pi \circ v), i = 1, \dots, n$. ただし $\pi \circ v(E) := v(\pi^{-1}(E)), E \in \mathfrak{S}$.

公理 4 (加法性). 2^X 上の任意のゲーム v_1, v_2 に対して, $\phi^i(v_1 + v_2) = \phi^i(v_1) + \phi^i(v_2), i = 1, \dots, n$.

公理 5 (凸性). 集合系 $\mathfrak{S}, \mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2$ が $\Gamma_n(\mathfrak{S}) = \Gamma_n(\mathfrak{S}_1) \cup \Gamma_n(\mathfrak{S}_2)$, $\Gamma_n(\mathfrak{S}_1) \cap \Gamma_n(\mathfrak{S}_2) = \emptyset$ を満たすとする. このときある $\alpha \in (0,1)$ が存在して, $\mathfrak{S}$ 上の任意のゲーム v に対して,

$$\phi^i(v) = \alpha\phi^i(v|_{\mathfrak{S}_1}) + (1-\alpha)\phi^i(v|_{\mathfrak{S}_2}), i = 1, \ldots, n$$

ただし $v|_{\mathfrak{S}_1}, v|_{\mathfrak{S}_2}$ はそれぞれ v の $\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2$ による制限を表す.

(FK) は上記の 5 つの公理によって特徴付けされる.

定理 7 ((FK) の特徴付け). v を正規集合系 $(X, \mathfrak{S})$ 上のゲームとする. このとき公理 1, 2, 3, 4, 5 を満たすゲームの解 $\Phi(v) = \{\phi^1(v), \ldots, \phi^n(v)\}$ が一意に存在して (FK) で与えられる.

また, Shapley 値は, 公理 1,2,3,4 で特徴付けされる. ただし, 公理 3 はより簡単に表現できる.

公理 3' (対称性) X 上の任意の置換 π について, $\phi^i(v) = \phi^{\pi(i)}(\pi \circ v), i = 1, \ldots, n.$

定理 8 ((S) の特徴付け). v を正規集合系 $(X, \mathfrak{S})$ 上のゲームとする. このとき公理 $1, 2', 3', 4$ を満たすゲームの解 $\Phi(v) = \{\phi^1(v), \ldots, \phi^n(v)\}$ が一意に存在して (S) で与えられる.

$(X, 2^X)$ 上だけのゲームの解を考えるのならば, 公理 5 は意味がない (常に真である). 定理 7 は定理 7 の一般化といえる.

注意 9. v を $(X, \mathfrak{S})$ 上のゲームとするとき, $(X, \mathfrak{S}, v)$ をゲーム空間とよぶことにする. Σ_n を $X := \{1, 2, \ldots, n\}$ の正規集合系全体とし, $\Delta_{\mathfrak{S}}$ を $(X, \mathfrak{S})$ 上のゲーム全体とする. Φ の定義域は $\Delta := \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{\mathfrak{S} \in \Sigma_n} \Delta_{\mathfrak{S}}$ であり Φ は Δ から $\mathbb{R}^n$ への関数である. 以上のことから $\Phi(X, \mathfrak{S}, v)$ と記述するべきであるが, 混乱のない限り単に $\Phi(v)$ と書くことにする.

3 正規集合系上のゲーム

この節では正規集合系上のゲームについて考察する.

束上に定義されたゲームは, 定義域の束に変換を施すことで集合系のゲームとすることができる. 例えば, 図 1 の束 L_1 上のゲーム v が定義されているとする. 束 $(L, \vee, \wedge, \top, \bot)$ の $\vee$ 既約元 ($\vee$-irreducible element) は次で定義される.

定義 10 ($\vee$ 既約元). $x \in (L, \leq)$ について次が成り立つとする: 任意の $a, b \in L$ に対して, $x \neq \bot$ かつ $x = a \vee b$ ならば, $x = a$ または $x = b$. このとき x を $\vee$ 既約元であるという.

束 L に対して次の変換 η 考える. $a \in L$ に対して,

$$\eta(a) := \{x \in \mathcal{J}(L) \mid x \leq a\},$$

ただし $\mathcal{J}(L)$ は L の $\vee$ 既約元全体. η は L から η の束同型写像, つまり $\eta(L) := \{\eta(a) \mid a \in L\}$ とすると $(L, \leq) \cong (\eta(L), \subseteq)$ である. 言い換えると η で変換することにより束 L と同型な集合系 $\eta(L)$ を得ることができる. $\eta(L)$ が正規集合系であれば, L 上のゲームの解として (FK) を適用することができる.

例 11. L_1(図 *1*) 上に関数 v が定義されているとし, $v(g)=0$ とする. L_1 の $\vee$ 既約元は d,e,f である. また $\eta(L_1)=\{\{d\},\{e\},\{f\},\{d,e\},\{e,f\},\{d,e,f\}\}$ である. $\eta(L_1)$ は正規集合系であり, $v(\emptyset)=0$ なので, (L,v) は正規集合系上のゲームであり, (FK) で解を得ることができ,

$$
\begin{aligned}
\phi^d(v) &= \frac{1}{4}(v(d)-v(g))+\frac{1}{4}(v(b)-v(e))+\frac{1}{2}(v(a)-v(c)) \\
\phi^e(v) &= \frac{1}{2}(v(e)-v(g))+\frac{1}{4}(v(b)-v(d))+\frac{1}{4}(v(c)-v(f)) \\
\phi^f(v) &= \frac{1}{4}(v(f)-v(g))+\frac{1}{4}(v(c)-v(e))+\frac{1}{2}(v(a)-v(b))
\end{aligned}
$$

となる.

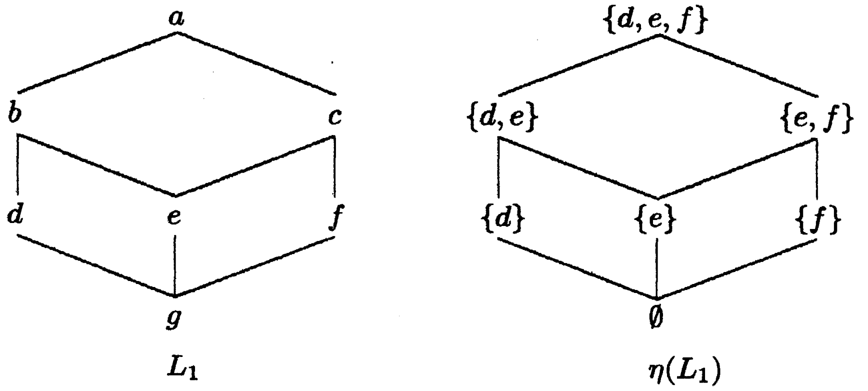

図 1:

変換 η により, 一般的なゲームを正規集合系上のゲームと見なすことができる. 例えば, 協力ゲームの一般化として知られる, Multi-choice game や Bi-capacity は変換 η により正規集合系のゲームとなる. ここでは Multi-choice game を例に適用法を説明する.

定義 12 (Multi-choice game). $N:=\{1,\dots,n\}$, $L:=L_1\times\cdots\times L_n$, ただし $(L_i,\leq_i), i=1,2,\dots,n$ は全順序集合, すなわち $L_i=\{\perp_i,c_{i,1},c_{i,2},\dots,c_{i,\ell_i}\}$, $\perp_i\leq_i c_{i,1}\leq_i c_{i,2}\leq_i\cdots\leq_i c_{i,\ell_i}$ とする. L 上の関数が, $v((\perp_1,\perp_2,\dots,\perp_n))=0$ を満たすとき, v を *Multi-choice game* とよぶ.

N はプレーヤーの集合を表し, L_i はプレイヤー i の選択肢の全体である. プレイヤー i は $L_i=\{\perp_i,c_{i,1},c_{i,2},\dots,c_{i,\ell_i}\}$, ($\perp$ は何もしないことを意味する) の中から, すなわち ℓ_i+1 個の選択肢からの選択が可能である. $v((c_1,c_2,\dots,c_n))$ は各プレイヤーがそれぞれ $c_1,c_2,\dots,c_n (c_i\in L_i)$ を選択したときの利得を表す.

$\eta(L)$ は正規集合系となるので, 解 (FK) が適用可能であり,

$$\mathcal{J}(L)=\{(\perp_1,\dots,\perp_{i-1},c(i),\perp_{i+1},\dots,\perp_n)\mid c(i)\in L_i\setminus\{\perp_i\}\},$$

$|\mathcal{J}(L)|=\sum_{i=1}^{n}\ell_i$ であり, $j=1,\dots,\ell_i$ に対して,

$$\phi^{(\perp_1,\dots,\perp_{i-1},c(i),\perp_{i+1},\dots,\perp_n)}(v) \;=\; \sum_{a\in L/L_i}\xi^{(a,c(i,j))}\left(v(a,c(i,j))-v(a,c(i,j-1))\right),$$

ただし, $\boldsymbol{a} \in L/L_i := L_1 \times \cdots \times L_{i-1} \times L_{i+1} \times \cdots \times L_n$, $(\boldsymbol{a}, c(i,j)) := (a_1, \ldots, a_{i-1}, c(i,j), a_i, a_{i+1}, \ldots, a_{n-1}) (\in L)$, また係数 $\xi^{(\boldsymbol{a},c(i,j))}$ は

$$\xi^{(\boldsymbol{a},c(i,j))} := \frac{|\{\mathscr{C} \in \mathscr{M}_\ell(L) \mid \{\mathscr{C} \ni (\boldsymbol{a}, c(i,j)), (\boldsymbol{a}, c(i,j-1))\}|}{|\mathscr{M}_\ell(L)|},$$

ただし $\ell := \sum_{i=1}^n \ell_i$, で与えられる.

プレイヤー i が $c(i,j)$ を選んだときの貢献は

$$\sum_{J \in \eta(c(i,j))} \phi^J(v)$$

となり, プレイヤー i の配分は,

$$\sum_{j=1}^{\ell_i} \phi^{(\perp_1, \ldots, \perp_{i-1}, c(i,j), \perp_{i+1}, \ldots, \perp_n)}(v)$$

となる.

例 13. 図 2 の L 上に定義された 2 プレイヤー multi choice game を考える. プレイヤー 1 には $\{0,1,2\}$ の 3 つの選択肢, プレイヤー 2 には $\{0,1,2,3\}$ の 4 つの選択肢がある. このうち 0 は定義 12 の $\perp$ であり, 何もしないことを意味し, $v(0,0) = 0$, つまりプレイヤー 1 と 2 が何もしないときの利得は 0 である. $\mathcal{J}(L) = \{(1,0), (2,0), (0,1), (0,2), (0,3)\}$ であり, $\eta(L)$ は図 2 に示すとおりである. $|\mathscr{M}_{2+3}(L)| = 10$ であり,

$$\begin{aligned}
\phi^{(1,0)} &= \frac{4}{10}(v((1,0)) - v((0,0))) + \frac{3}{10}(v((1,1)) - v((0,1))) + \frac{2}{10}(v((1,2)) - v((0,2))) \\
&\quad + \frac{1}{10}(v((1,3)) - v((0,3))), \\
\phi^{(2,0)} &= \frac{1}{10}(v((2,0)) - v((1,0))) + \frac{2}{10}(v((2,1)) - v((1,1))) + \frac{3}{10}(v((2,2)) - v((1,2))) \\
&\quad + \frac{4}{10}(v((2,3)) - v((1,3))), \\
\phi^{(0,1)} &= \frac{6}{10}(v((0,1)) - v((0,0))) + \frac{3}{10}(v((1,1)) - v((1,0))) + \frac{1}{10}(v((2,1)) - v((2,0))), \\
\phi^{(0,2)} &= \frac{3}{10}(v((0,2)) - v((0,1))) + \frac{4}{10}(v((1,2)) - v((1,1))) + \frac{3}{10}(v((2,2)) - v((2,1))), \\
\phi^{(0,3)} &= \frac{1}{10}(v((0,3)) - v((0,2))) + \frac{3}{10}(v((1,3)) - v((1,2))) + \frac{6}{10}(v((2,3)) - v((2,2)))
\end{aligned}$$

となる. プレイヤー 1 が 1, 2 を選んだときの貢献はそれぞれ $\phi^{(1,0)}(v)$, $\phi^{(1,0)}(v) + \phi^{(2,0)}(v)$, プレイヤー 2 が 1, 2, 3 を選んだときの貢献はそれぞれ $\phi^{(0,1)}(v)$, $\phi^{(0,1)}(v) + \phi^{(0,2)}(v)$, $\phi^{(0,1)}(v) + \phi^{(0,2)}(v) + \phi^{(0,3)}(v)$ となる. また, プレイヤー 1 の配分は $\phi^{(1,0)}(v) + \phi^{(2,0)}(v)$ プレイヤー 2 の配分は $\phi^{(0,1)}(v) + \phi^{(0,2)}(v) + \phi^{(0,3)}(v)$ である.

4 情報の欠落したゲームの解

通常の協力ゲームで, 全ての提携についてのゲームの値がわかっていない場合を考える. つまり, $\mathfrak{S} \subsetneq 2^X$ 上のみにしか v の値がわかっていないとする. この場合も $\mathfrak{S}$ が正規集合系であれば

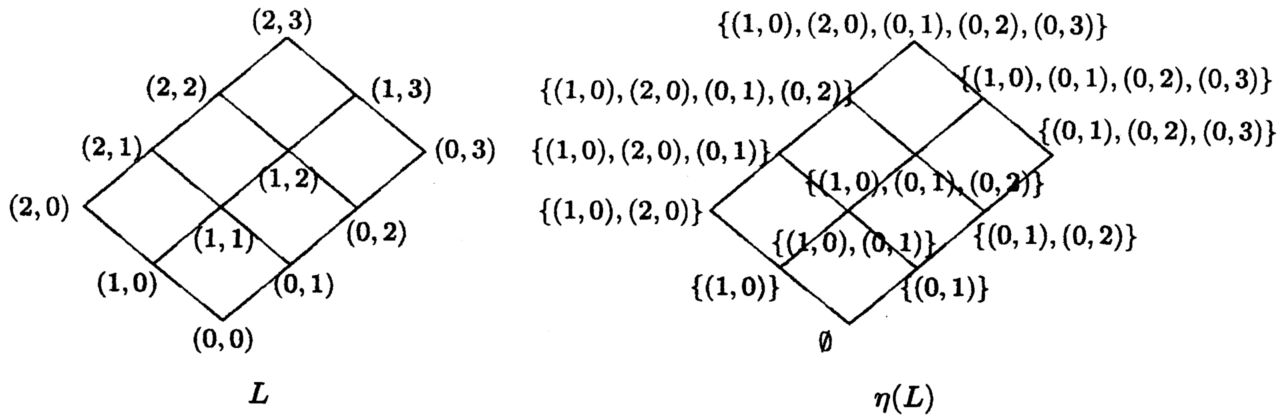

図 2: 2-players game

(FK) を適用し, 解を求めることが可能である. この場合 (FK) は適切な解となるであろうか. [7] で検討した例を再び取り上げる.

例 14. $X=\{1,2,3\}$ とし, $\mathfrak{S}=\{\emptyset,\{1\},\{2\},\{1,2\},\ \{1,2,3\}\}$ 上のゲームの値のみがわかっており, $v(\emptyset)=0, v(\{1\})=0.01, v(\{2\})=0, v(\{1,2\})=0.01, v(\{1,2,3\})=1$ であるとする. (FK) を 適用すると, 解は $\Phi_{\mathrm{FK}}(v)=(0,01,0.99,0)$ である. 他方, Algeba らの提案する解 ([1]) では, $\Phi_{\mathrm{A}}(v)=(0,034,0.33,0.33)$ となる.

例 14 の場合, 我々の解 (FK) では, プレイヤー 3 の配分は 0 である. というのもプレイヤー 3 は知り得ている情報からナルプレイヤー (公理 2) と見なされているからである. しかしながら, $v(\{1,2,3\})=1$ が, プレイヤー 1, 2, 3 の提携の相乗効果である可能性があり, また, 他の提携の値がわかっていないのでプレイヤー 3 をナルプレイヤーと決めてしまうのはよくないであろう. つまり公理 2 は, 情報が欠けているため正規集合系上の (2^X ではなく) ゲームとなっている場合のゲームの解の性質としては適切ではない. 一方, Algeba らの解では, 3 人にほとんど同じ配分がなされており, 知り得ている情報からはプレイヤー 1 と 2 はほとんど貢献がないという事実が全く反映されていうない. このような情報の欠けた提携ゲームに対して, 未知の値の取り得る値の可能性と, 現在わかっている値の両方を反映する解として, 新しい次の解を提案する.

定義 15. 任意の $(X,\mathfrak{S})$ 上のゲーム $v:\mathfrak{S}\to I\!R$ に対して,

$$\phi^i(v):=\frac{1}{|\mathscr{M}_n(2^X)|}\sum_{C\in\mathscr{M}_n(\mathfrak{S})}\frac{v(\underline{E}_C^i)-v(\bar{E}_C^{\setminus i})}{|\underline{E}_C^i|-|\bar{E}_C^{\setminus i}|},$$

$i=1,\ldots,n$, ただし $\underline{E}_C^i=\{\bigcap E\mid E\in\mathcal{C},E\ni i\}$, $\bar{E}_C^{\setminus i}=\{\bigcup E\mid E\in\mathcal{C},E\not\ni i\}$.

これは, $A\subset B$ なる $A,B\in\mathfrak{S}$ に対して, $v(A),v(B)$ がわかっているときに, $v(B)-v(A)$ は $B\setminus A$ に含まれるプレイヤー全員の平等な貢献によるものと見なすものである. 例 14 に適用すると $\Phi(v)=(0,20,0.61,19)$ となる. この解を公理系により特徴付けし妥当性を検討することが今後の課題である.

参考文献

[1] E. Algaba, J.M. Bilbao, R. van den Brink and A. Jime' nez-Losada, Axiomatizations of the Shapley value for cooperative games on antimatroids, Math. Meth. Oper. Res. **57**, 49-65, 2003.
[2] J.F. Banzhaf, Weighted voting doesn't work, A mathematical analysis. Rutgers Law Review **19**, 317-343,1965.
[3] U. Faigle and W. Kern, The Shapley value for cooperative games under precedence constraints, Int. J. of Game Theory bf 21, 249-266, 1992.
[4] A. Honda, M. Grabisch, Entropy of capacities on lattices and set systems Information Sciences, **176**, pp.3472-3489, 2006.
[5] A. Honda, Y. Okazaki, Axiomatization of Shapley value of Faige and Kern type on set systems Journal of Advanced Computational Intelligence and Intelligent Informatics, **12**(5), pp. 409-415, Fuji Technology Press, 2008.
[6] L.S. Shapley, A value for n-person games, Kuhn HW, Tucker, AW (eds) Contributions to the Theory of Games Vol. II, Princeton, 307-317, 1953.
[7] 本田あおい, 岡崎悦明, Shapley 値の公理, 京都大学数理解析研究所講究録 1561, 非加法の数理と情報: 函数解析の視点から, pp106-112, 2007.